

UNIVERSITÄT TÜBINGEN

PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM II

PD

Para- und Diamagnetismus

Von:
Fabian Kraus
Simon Fischer

Betreuung:
Dr. T. Hehl

10. Dezember 2021

Inhalt

1	Versuchsbeschreibung	1
2	Physikalische Grundlagen	1
2.1	Magnetfelder in Materie	1
2.2	Kräfte im externen Magnetfeld	1
2.3	Paramagnetismus	2
2.4	Diamagnetismus	3
2.5	Ferromagnetismus	3
3	Versuchsdurchführung	3
4	Ergebnisse & Auswertung	4
4.1	Aluminium-Block	4
4.2	Eisen(III)-Chlorid-Lösung	4
4.3	Bismut-Probe	5
4.3.1	Vermessung des Feldes	5
4.3.2	Kraft auf die Probe	6

1 Versuchsbeschreibung

Die Kraft eines externen, homogenen oder inhomogenen Magnetfeldes auf para- und diamagnetische Materialien wird mit verschiedenen Anordnungen untersucht und mit den theoretischen Vorhersagen verglichen.

2 Physikalische Grundlagen

2.1 Magnetfelder in Materie

Für die Beschreibung von Magnetismus in Materie sind drei Felder wichtig: Die *magnetische Induktion* \vec{B} , das *Magnetfeld* \vec{H} und die *Magnetisierung* \vec{M} .

Die Magnetisierung hängt folgendermaßen mit dem magnetischen Dipolmoment \vec{m} zusammen:

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum \vec{m}_i$$
$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V d^3r \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) = I \vec{A}$$

wobei \vec{j} die Stromdichte ist, I die Stromstärke, V das Volumen der Probe und \vec{A} die gerichtete Fläche, die die Leiterschleife einschließt. Im klassischen Bild, genauer im Bohr'schen Atommodell, kann man das kreisende Elektron als einen solchen Kreisstrom auffassen.

Das Verhalten des Magnetfelds ist gegeben durch die Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

wobei für diesen Versuch der zweite Term keine Rolle spielt, da die elektrischen Felder statisch sind.

Die magnetische Induktion ist die messbare Größe, und definiert als Summe von Magnetfeld und Magnetisierung:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

In vielen Materialien lässt sich die Magnetisierung gut durch $\vec{M} = \chi \vec{H}$ beschreiben, wobei χ die Suszeptibilität ist. Im Versuch ist es ausreichend χ als Konstante zu betrachten.

Das Magnetfeld innerhalb eines Materials ist dann

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi) \vec{H} \equiv \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (1)$$

mit der *magnetischen Permeabilität* $\mu_r = 1 + \chi$. Anstatt μ_r zu messen beschäftigen wir uns mit der Messung von χ , was gleichwertig in dem Sinne ist, dass sie sich nur um die Addition einer 1 unterscheiden. Es ist oft naheliegender χ zu bestimmen, da μ_r oft sehr nahe an 1 liegt. Es ist auch noch zu erwähnen, dass Supraleiter eine Suszeptibilität von $\chi = -1$ aufweisen.

Außerdem gibt es noch die *Massensuszeptibilität* κ , die definiert ist als

$$\kappa = \frac{\chi}{\rho} \quad (2)$$

2.2 Kräfte im externen Magnetfeld

Die potentielle Energie eines magnetischen Dipols \vec{m} in einer magnetischen Induktion \vec{B} ist gegeben durch $W = -\vec{m} \cdot \vec{B}$. Dadurch folgt sofort, dass die Kraft auf den Dipol gegeben ist durch

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W = \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (3)$$

Es wirkt also keine Kraft, wenn die magnetische Induktion konstant ist, was einem homogenen Magnetfeld entspricht.

Selbst bei homogenen Magnetfeldern kann allerdings ein Drehmoment \vec{D} induziert werden:

$$\vec{D} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (4)$$

Für eine Probe mit Volumen V ist mit lokal konstanten \vec{B}, \vec{H} die Feldenergie W :

$$W = -\frac{VB^2}{2\mu_0}(1 + \chi)$$

Die Kraft, die auf die Probe wirkt, ist hiermit gegeben durch

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}W = \frac{\chi V}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{\nabla} B \quad (5)$$

Für einen näherungsweise zylindrischen Körper mit Querschnitt A ist die gesamte Kraft erhalten durch Integration:

$$F = \frac{\chi A}{2\mu_0} (B^2(x_2) - B^2(x_1))$$

ist das eine Ende nicht im Feld, so ist einfach

$$F = \frac{\chi A}{2\mu_0} B^2(x_2) \quad (6)$$

Durch Umstellen erhält man eine Formel zur Berechnung der Suszeptibilität aus der Kraft:

$$\chi = \frac{2\mu_0}{A} \cdot \frac{F}{B^2} \quad (7)$$

Betrachtet man eine Flüssigkeitsäule im Magnetfeld, so ist die Steighöhe h gegeben durch das Kräftegleichgewicht zwischen Gewichtskraft und Magnetfeld:

$$F_G = \rho A h g = \frac{\chi A}{2\mu_0} (B^2(h)) = F_M$$

Daraus erhält man für die Steighöhe h :

$$h = \frac{B^2}{2g\mu_0} \frac{\chi}{\rho} \quad (8)$$

Damit ist die Massensuszeptibilität κ gegeben als

$$\kappa = \frac{\chi}{\rho} = \frac{2gh\mu_0}{B^2} \quad (9)$$

2.3 Paramagnetismus

Stoffe mit $\chi > 0$ nennt man paramagnetisch; bei diesen zeigt wegen $\vec{M} = \chi \vec{H}$ die Magnetisierung in die selbe Richtung wie das Magnetfeld; das externe Feld wird also im Inneren verstärkt und das Material wird in das Feld hineingezogen.

Hier richten sich die zunächst zufällig verteilten Dipole im Material entlang des externen Feldes aus, sie haben aber auch eine thermische Bewegung, die dieser festen Ausrichtung entgegenwirkt. Für paramagnetische Materialien gilt das Curie-Gesetz

$$\chi \propto \frac{1}{T} \quad (10)$$

2.4 Diamagnetismus

Stoffe mit $\chi < 0$ nennt man diamagnetisch; bei diesen zeigt wegen $\vec{M} = \chi \vec{H}$ die Magnetisierung entgegen dem Magnetfeld; das externe Feld wird also im Inneren abgeschwächt und das Material wird von dem Feld abgestoßen.

Hier wirkt auf Elektronen in Atomen je nach deren Bahnbewegung entweder eine beschleunigende oder abbremssende Kraft. Für Atome mit mehreren Elektronen, die ohne externes Feld kein Dipolmoment haben, entsteht dadurch als Netto-Effekt ein Dipol, der dem Feld entgegenzeigt.

Dieser Effekt ist schwächer als der für Paramagnetismus verantwortliche.

2.5 Ferromagnetismus

Bei manchen Materialien entstehen durch das externe Magnetfeld kleine Bereiche in denen die Magnetisierung in verschiedene Richtungen zeigt, sogenannte Weiß'sche Bezirke; diese Materialien nennt man ferromagnetisch. Dieses Verhalten findet man aber nur unterhalb einer bestimmten Temperatur T_C , der Curie-Temperatur, die vom Material abhängt. Oberhalb dieser Temperatur sind diese Materialien paramagnetisch. Hier gilt damit das Curie-Weiß-Gesetz

$$\chi = \frac{C}{T - T_C} \quad (11)$$

mit der Curie-Konstanten C .

Dieser Effekt ist stärker als Para- und Diamagnetismus, aber eben nur bis zur Curie-Temperatur.

3 Versuchsdurchführung

Der Versuch ist unterteilt in drei Teile:

1. (a) Die Kraft, die in einem homogenen Magnetfeld auf einen Aluminium-Block wirkt, wird in Abhängigkeit von der Stärke des Magnetfelds gemessen. Das Magnetfeld wird realisiert durch zwei Spulen mit Polschuhen, die Stärke des Magnetfelds wird durch die Stromstärke eingestellt und mit einer Hall-Sonde gemessen.
2. (b) Die Kraft, die in einem homogenen Magnetfeld auf eine Eisen(III)-Chlorid-Lösung wirkt wird anhand der Steighöhe gemessen; das Magnetfeld wird wie in Teil 1. realisiert.
3. (c/d) Die Kraft eines inhomogenen Magnetfelds auf eine Bismut-Probe wird ermittelt. Dazu werden die Polschuhe verdreht und zunächst das Magnetfeld selbst (also ohne Bismut-Probe) vermessen. Anschließend wird die Kraft auf die Bismut-Probe bestimmt.

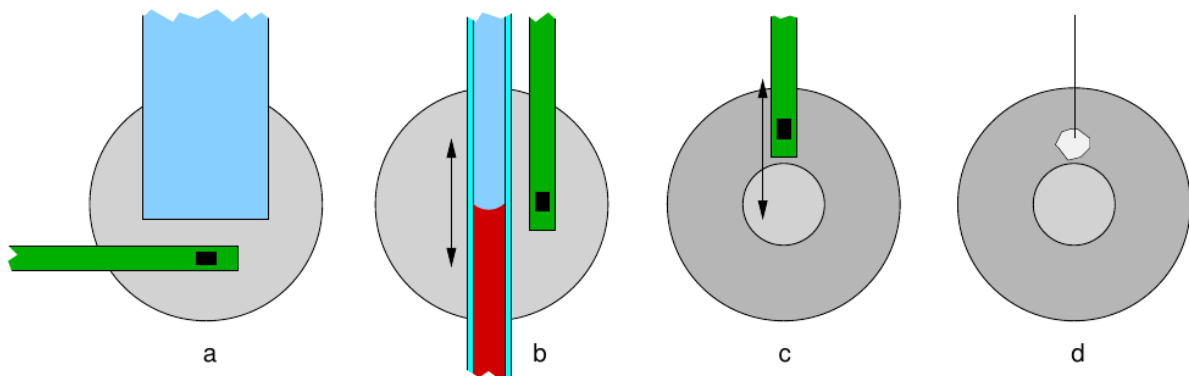


Abbildung 1: Versuchsaufbau (aus der Anleitung)

4 Ergebnisse & Auswertung

4.1 Aluminium-Block

Für die Messung mit Aluminiumblock wurde ein Block mit der Fläche $1.6 \cdot 10^{-4} \text{m}^2$ verwendet. Für die Berechnung der Suszeptibilität wird Gleichung (7) herangezogen. Der Term $\frac{F}{B^2}$ folgt direkt aus der Steigung der Ausgleichsgeraden.

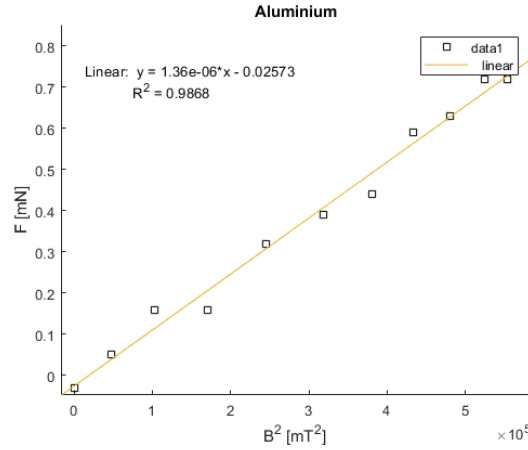


Abbildung 2: Aluminium: Kraft in Abhängigkeit Quadrats der magnetischen Induktion

Damit ist $\frac{F}{B^2}$ gegeben zu

$$\frac{F}{B^2} \approx 1.36 \cdot 10^{-6} \frac{10^{-3} \text{ N}}{10^{-6} \text{ T}^2} = 1.36 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{T}^2} \quad (12)$$

Dies führt unter Verwendung von (7) zum Ergebnis

$$\chi = 2.136 \cdot 10^{-5} \quad (13)$$

und mit dem systematischen Fehler für die Fläche A

$$\Delta l_{sys1} = 0.5 \cdot 0.0001 \text{ m} + 0.005 \cdot 2.09 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1.545 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (14)$$

$$\Delta l_{sys2} = 0.5 \cdot 0.0001 \text{ m} + 0.005 \cdot 0.8 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 9 \cdot 10^{-5} \text{ m} \quad (15)$$

$$\rightarrow \Delta A = |l_1 \cdot 1.545 \cdot 10^{-4}| + |l_2 \cdot 9 \cdot 10^{-5}| \approx 3.94905 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \quad (16)$$

Und damit nach Fehlerfortpflanzung

$$\Delta \chi = \left| -\frac{2\mu_0}{A^2} \cdot \frac{F}{B^2} \cdot \Delta A \right| \approx 9.53 \cdot 10^{-7}. \quad (17)$$

Zusammenfassend ist die Suszeptibilität berechnet worden zu

$$\chi = (2.136 \cdot 10^{-5} \pm 9.53 \cdot 10^{-7}) \quad (18)$$

Dies liegt nahe am Literaturwert von $2.22 \cdot 10^{-5}$; Er liegt im Fehlerintervall des berechneten Wert. Das Ergebnis stellt sich damit als sehr exakt heraus.

4.2 Eisen(III)-Chlorid-Lösung

Es gilt die Massensuszeptibilität κ zu berechnen. Dies geschieht mithilfe von Beziehung (9) aus der Theorie. Der Teil $\frac{h}{B^2}$ ist erneut aus dem untenstehenden Diagramm abzulesen und ergibt sich betragsmäßig zu

$$\frac{h}{B^2} = 2.224 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{10^{-3} \text{ m}}{10^{-6} \text{ T}^2} = 2.224 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{T}^2}. \quad (19)$$

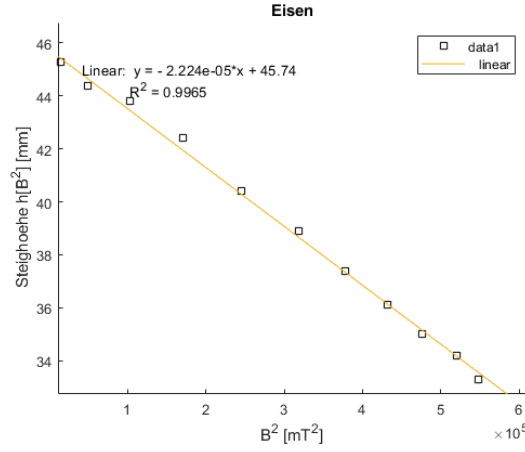


Abbildung 3: Eisen: Steighöhe in Abhängigkeit Quadrats der magnetischen Induktion

Der Fehler ergibt sich aus dem Fit zu

$$\Delta \frac{h}{B^2} = 7.84 \cdot 10^{-4} \frac{m}{T^3} \quad (20)$$

Damit ist der Fehler der Massensuszeptibilität

$$\Delta \kappa = \left| 2g\mu_0 \Delta \frac{h}{B^2} \right| \approx 1.933 \cdot 10^{-8} \frac{m^3}{kg}. \quad (21)$$

Also ist die berechnete Massensuszeptibilität

$$\kappa = (5.483 \pm 0.193) 10^{-7} \frac{m^3}{kg}. \quad (22)$$

Dieser Wert liegt nahe am Literaturwert von $5.32 \cdot 10^{-7} \frac{m^3}{kg}$. Das berechnete Ergebnis liegt damit im Fehlerintervall.

4.3 Bismut-Probe

4.3.1 Vermessung des Feldes

Um die Feldstärke zu vermessen, wurde die Hall-Sonde höhenverstellbar in der Mitte zwischen den zwei Polschuhen eingebracht und die Höhe x mit dem Fernrohr genau gemessen. Dabei wurde wie in der Anleitung der Nullpunkt $x = 0$ als oberes Ende der Polschuhe festgelegt, siehe Abb. 4:

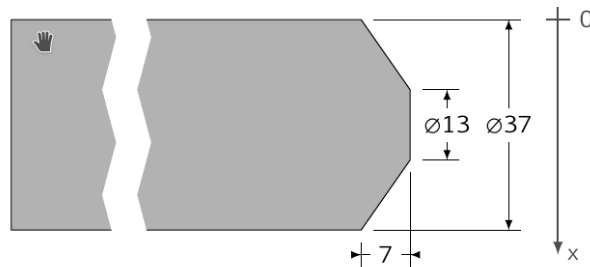


Abbildung 4: Definition der Position x (aus der Anleitung)

Die gemessene magnetische Induktion als Funktion dieser Höhe x ist in Abb. 5 zu sehen. Man erkennt das Maximum des Feldes in der Mitte der Schuhe bei $x \approx 18.5mm$, wo die Feldstärke $B \approx 0.8T$ erreicht.

Um den Gradienten der magnetischen Induktion $\frac{dB}{dx}$ auszurechnen wurden die Messpunkte an ein Polynom vierten Grades angepasst welches dann analytisch abgeleitet wurde; siehe Abb. 6.

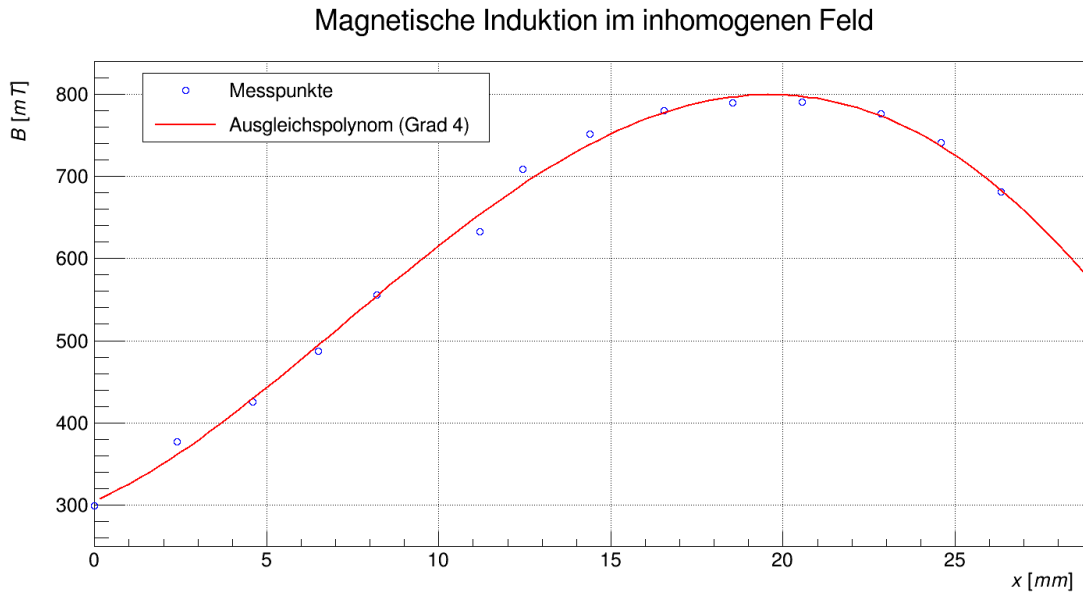


Abbildung 5: Orstabhängigkeit des inhomogenen Magnetfelds

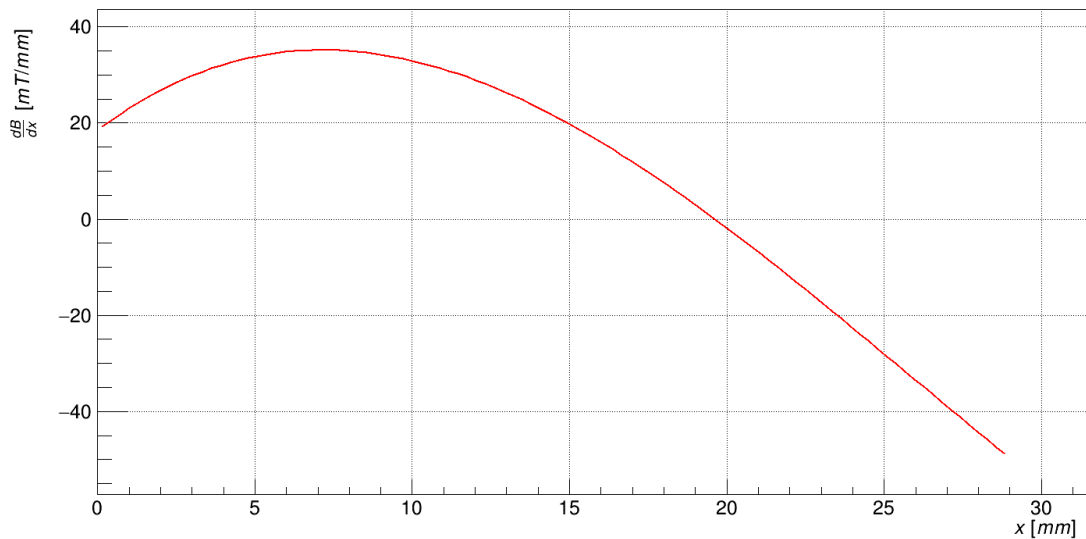


Abbildung 6: Gradient der Magnetischen Induktion

4.3.2 Kraft auf die Probe

Hier berechnen wir aus der Kraft auf die Bismut-Probe im inhomogenen Magnetfeld deren Suszeptibilität. Durch Formel (5) brauchen wir dafür das Volumen V der Probe, die magnetische Induktion B und deren Gradienten $\frac{dB}{dx}$ an der Stelle, wo die Probe ist, sowie die magnetische Kraft, die auf die Probe wirkt.

Volumen Zunächst wurde die Gewichtskraft auf die Bi-Probe (ohne Magnetfeld) gemessen, um deren Volumen zu berechnen. Die gemessene Kraft mit statistischem Fehler war

$$F_G = (12.60 \pm 0.14) \text{ mN}$$

Zusätzlich wurde für diesen Messwert ein systematischer Fehler von 1% geschätzt. Hiermit ist die Masse der Probe mit gesamtem Fehler:

$$m = \frac{F_G}{g} = 1.28\text{g} \pm 26.14\text{mg}$$

Als Dichte von Bismut wurde der Literaturwert von $\varrho = 9.78\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ benutzt, um damit das Volumen V der Probe zu berechnen:

$$\begin{aligned} V &= \frac{m}{\varrho} = 0.13\text{cm}^3 \pm 2.67\text{mm}^3 \\ &= (1.31 \cdot 10^{-7} \pm 2.67 \cdot 10^{-9}) \text{m}^3 \end{aligned}$$

Kraft Zum Messen der magnetischen Kraft wurde die Bismut-Probe am Kraftmesser zwischen die Polschuhe ungefähr an die Position des maximalen Gradienten eingehängt. Daraufhin wurde mit CASSY 100 mal die Kraft festgehalten, wobei nach jedem zehnten Mal das Magnetfeld an- bzw. ausgeschaltet wurde. Die so entstandenen Sprünge wurden gemittelt, um den folgenden Wert für die auf die Probe wirkende Kraft zu erhalten:

$$F_x = - (0.31 \pm 0.06) \text{mN}$$

Magnetische Induktion Die Probe wurde ungefähr bei $x \approx 10\text{mm}$ zwischen die Polschuhe eingebracht; da wir keinen Messwert an exakt dieser Stelle hatten benutzen wir hier das Ausgleichpolynom (siehe vorheriger Abschnitt und Abb. 5) und werten es an dieser Stelle aus, wobei wir wieder einen systematischen Fehler von einem Prozent annehmen:

$$B(x = 10\text{mm}) \approx (615.81 \pm 6.15) \text{mT}$$

Gradient Werten wir die Ableitung des Ausgleichpolynoms an der selben Stelle aus, so haben wir eine Annäherung an den Feldgradienten dort:

$$\frac{dB}{dx}(x = 10\text{mm}) \approx (32.97 \pm 0.32) \text{mT/mm}$$

Suszeptibilität Damit folgt insgesamt für die Suszeptibilität von Bismut:

$$\begin{aligned} \chi_{Bi} &= \mu_0 \frac{F_x}{VB} \cdot \left(\frac{dB}{dx} \right)^{-1} \\ &= - (1.48 \pm 0.35) \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Der Literaturwert beträgt $\chi_{Bi,lit} = -1.57 \cdot 10^{-4}$, unser Ergebnis ist also recht gut, auch wenn der Fehler ziemlich groß ist. Die Abweichungen kann man unter anderem dadurch erklären, dass B und $\frac{dB}{dx}$ wegen der endlichen Ausdehnung der Probe nicht überall in der Probe gleich sind.